Se méfier des angles et utiliser les complexes

On se propose de résoudre l'exercice suivant :

Exercice 1 *Dans un plan affine euclidien orienté, on considère une rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ modulo 2π (avec $0 \leq \theta < 2\pi$). Soit D une droite quelconque ne contenant pas Ω. A tout point M de D on associe le milieu I_M du segment $[Mr(M)]$. Quel est le lieu décrit par I_M quand M se déplace sur D ?*

(α) *Une réponse rapide* — Il suffit de faire un dessin pour comprendre la situation. Sur la FIG. 1, le point I_M est le milieu de $[Mr(M)]$, et le triangle $\Omega Mr(M)$ est isocèle en Ω, donc $\Omega I_M M$ est rectangle en I_M. On a donc toujours :

$$\frac{\Omega I_M}{\Omega M} = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M) = \frac{\theta}{2}\ (2\pi), \quad (*)$$

ce qui signifie que I_M est l'image de M par la similitude directe de centre Ω, d'angle $\theta/2$ et de rapport $|\cos(\theta/2)|$. Le lieu de points cherché est donc l'image de la droite D par cette similitude.

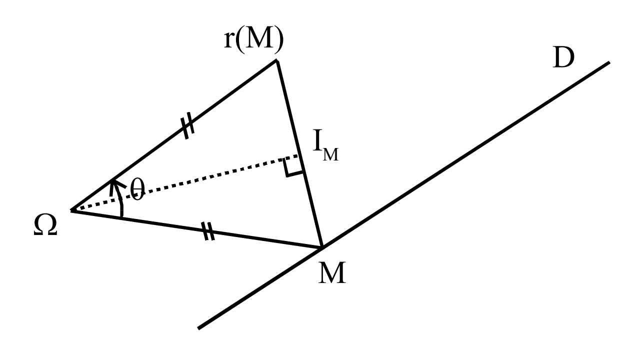


Figure 1: Une situation qui paraît simple

(β) *Une autre solution utilisant les complexes* — En notant avec des petites lettres les affixes des points, avec une exception pour l'affixe de I_M que l'on notera i_M, on obtient :

$$\begin{cases} r(z) = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \\ i_M - z = \frac{1}{2}(r(z)-z) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} i_M &= \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}(z-\omega)+\omega-z\right)+z \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}(z-\omega)+\omega-z\right)+(z-\omega)+\omega \\ &= \left(\frac{e^{i\theta}-1}{2}+1\right)(z-\omega)+\omega \\ &= \frac{e^{i\theta}+1}{2}(z-\omega)+\omega. \end{aligned}$$

[0] [b1110601-oral01] 4 juin 2011 Site Web MegaMaths

Cela montre que i_M est l'image de M par l'application s d'expression complexe :

$$s(z) = a(z-\omega)+\omega \quad \text{où} \quad a = \frac{e^{i\theta}+1}{2}.$$

On constate que s est une similitude directe dès que $a \neq 0$, c'est-à-dire dès que $\theta \neq \pi$. Le cas où $\theta = \pi$ ne pose pas de problème puisqu'alors tous les points I_M coïncident avec Ω, et le lieu des points cherché est tout simplement le singleton $\{\Omega\}$.
On mettra aussi de côté le cas particulier où $\theta = 0$, puisqu'alors $a = 1$ et s est l'identité. Supposons donc que θ soit différent de 0 et de π. Dans ce cas, s est la similitude directe de centre Ω, d'angle $\arg a$ et de rapport $|a|$. Comme :

$$a = \frac{e^{i\theta}+1}{2} = e^{i\theta/2} \times \frac{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}{2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2},$$

on doit envisager deux cas :

- Si $\cos(\theta/2) > 0$, c'est-à-dire si $0 < \theta < \pi$, la similitude s est d'angle $\theta/2$ et de rapport $\cos(\theta/2)$.

- Si $\cos(\theta/2) < 0$, c'est-à-dire si $\pi < \theta < 2\pi$, la similitude s est d'angle $\pi + \theta/2$ et de rapport $-\cos(\theta/2)$.

(γ) *Quelque chose ne va pas !* — On s'aperçoit que les conclusions obtenues en (α) et (β) sont différentes. Toujours en supposant θ différent de 0 et π, si dans les deux cas s est une similitude directe de centre Ω et de rapport $|\cos(\theta/2)|$, l'angle de cette similitude était toujours $\theta/2$ dans la réponse (α), alors qu'il vaut $\theta/2$ ou $\pi+\theta/2$ suivant le cas, quand on utilise des complexes dans la réponse (β). D'où la question légitime :

Où a-t-on commis une erreur ?

(δ) *Réponse* — Il semble que nous ayons validé trop vite les égalités ($*$). La FIG. 1 était trop sympathique et nous a induit en erreur : on a travaillé sur un seul cas de figure, celui où θ appartient à $]0,\pi[$, sans dessiner le cas où θ est supérieur à π.
Plus précisément, au lieu de ($*$), on aurait dû écrire (en utilisant des angles orientés de vecteurs) :

$$\frac{\Omega I_M}{\Omega M} = \left|\cos(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M)\right| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M) = \frac{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega r(M)})}{2} = \frac{\theta}{2} \ (\pi),$$

la deuxième affirmation étant bien une égalité modulo π au lieu d'être une égalité modulo 2π. En effet, comme (ΩI_M) est la bissectrice intérieure issue de Ω du triangle $\Omega M r(M)$, on a :

$$2(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega r(M)}) = \theta \ (2\pi)$$

d'où

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M) = \frac{\theta}{2} \ (\pi)$$

en divisant par deux les membres de cette égalité. Cette égalité modulo π permet toujours d'écrire :

$$\frac{\Omega I_M}{\Omega M} = |\cos(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M)| = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|,$$

ce qui donne le bon rapport de la similitude, mais permet seulement d'écrire :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M) = \frac{\theta}{2} \text{ ou } \pi + \frac{\theta}{2} \ (2\pi)$$

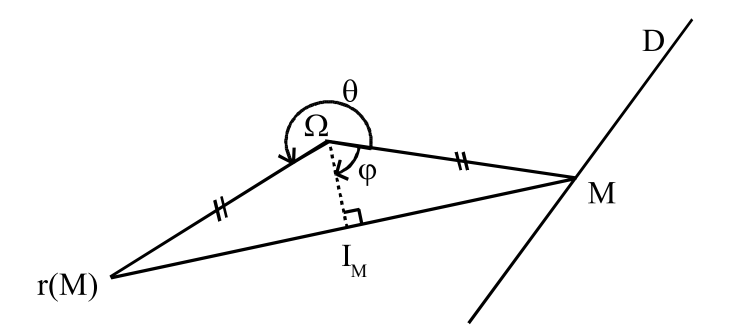


Figure 2: Le second cas de figure

ce qui ne détermine pas complètement l'angle de s. C'est en faisant des dessins que l'on s'aperçoit comment il faut choisir l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M)$ suivant que θ soit inférieur ou supérieur à π, mais cela ne constitue pas une preuve rigoureuse... Ainsi voit-on que, sur la FIG. 2 où $\theta \in]\pi, 2\pi[$, l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M)$ est égal à $\varphi = \pi + \theta/2$ radians, modulo 2π.

(ε) *Moralité* — La solution (β) utilisant des complexes permet de ne pas dire de bêtise et de démontrer ce résultat concernant l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}_M)$, résultat qu'il n'est pas si facile d'obtenir (modulo 2π) si l'on utilise seulement le fait que (ΩI_M) est la bissectrice du couple de demi-droites $([\Omega M), [\Omega r(M)))$.

(ζ) *Prolongements* — Dans l'énoncé de l'exercice, on peut remplacer la rotation r par une similitude directe quelconque. Dans se cas $r\,(z) = a(z - \omega) + \omega$, avec $a \in \mathbb{C}^*$, et les calculs faits en (β) donnent maintenant :

$$i_M = \frac{a+1}{2}(z - \omega) + \omega.$$

Si $a \neq -1$, i_M est toujours l'image de z par une similitude directe de centre Ω d'angle $\arg((a + 1)/2)$ et de rapport $|(a+1)/2|$.